Décompositions dans la catégorie dérivée

PIERRE DELIGNE

Soit $\mathscr{D}$ une catégorie triangulée munie d'une t-structure [**1**, §1.3.1] $\mathscr{C}$ son coeur (loc. cit.). Nous utiliserons les notations $\mathscr{D}^{\leq a}$, $\mathscr{D}^{\geq b}$, $\tau_{[a,b]}$, H^i de [**1**, §1.3]. Soit $K \mapsto K(1)$ une autoéquivalence de $\mathscr{D}$, transformant triangles distingués en triangles distingués et respectant la t-structure. On note $K \mapsto K(i)$ l'itéré i-ème ($i \in \mathbb{Z}$) de cette autoéquivalence. On appellera "torsion" les foncteurs $K \mapsto K(i)$.

On suppose les objets de $\mathscr{D}$ à cohomologie bornée: tout objet est dans un $\mathscr{D}^{\leq a}$ et dans un $\mathscr{D}^{\geq b}$. Si cette hypothèse n'était pas remplie, il y aurait lieu de supposer les objets considérés par la suite à cohomologie bornée.

Soit K un objet de $\mathscr{D}$, muni d'un morphisme

$$\eta: K \to K(1)[2]. \tag{0.1}$$

On notera encore η les morphismes déduits de η par torsion (i), décalage et troncation $\tau_{[a,b]}$, et on notera η^i un composé de i tels morphismes. Par exemple, on note encore η les morphismes dans la catégorie abélienne $\mathscr{C}$

$$\eta: H^i K \to H^{i+2} K(1) \tag{0.2}$$

déduits de (0.1).

Supposons que η vérifie

(L.V.) Pour tout $i \geq 0$, le $i^{\text{ème}}$ itéré de η, $\eta^i: H^{-i}(K) \to H^i(K)(i)$ est un isomorphisme.

Les arguments de [**2**], rappelés au paragraphe 1, montrent alors que K est isomorphe à la somme des $H^i(K)$, chacun placé en son degré cohomologique:

$$K \simeq \bigoplus H^i(K)[-i]. \tag{0.3}$$

Dans [**2**], j'annonce l'existence d'un isomorphisme (0.3) canonique. Le but de cette note est d'en définir un, et même plusieurs.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 18E30.

This paper is in final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.

1. Rappel de la preuve de [2]

Pour $i \geq 0$, la partie primitive P^{-i} de $H^{-i}(K)$ est le noyau de η^{i+1}: $H^{-i}(K) \to H^{i+2}(K)(i+1)$. Il résulte de (L.V.) que les morphismes (0.2) itérés induisent une décomposition en somme directe:

$$\sum_{j\geq 0} \eta^j : \bigoplus P^{-i-2j}(-j) \xrightarrow{\sim} H^{-i}(K). \tag{1.1}$$

Pour $H^i(K)$, on en déduit un isomorphisme

$$\sum_{j\geq 0} \eta^{i+j} : \bigoplus P^{-i-2j}(-i-j) \xrightarrow{\sim} H^i(K). \tag{1.2}$$

Ces isomorphismes se rassemblent en

$$\sum \eta^j : \bigoplus_{i,j} P^{-i}(-j) \xrightarrow{\sim} H^*(K), \tag{1.3}$$

la somme étant sur les i, j avec $0 \leq j \leq i$. Dans (1.3), $P^{-i}(-j)$ est facteur direct de $H^{2j-i}(K)$.

Rappelons qu'un foncteur cohomologique F de $\mathscr{D}$ dans une catégorie abélienne $\mathscr{A}$ est un foncteur additif tel que pour tout triangle distingué $K \to L \to M \to K[1]$, la suite $F(K) \to F(L) \to F(M)$ soit exacte [6, §3.1]. On pose $F^i(K) = F(K[i])$. Faisant tourner le triangle distingué $K \to L \to M \to K[1]$, on voit qu'un foncteur cohomologique F donne lieu à suite exacte longue

$$\cdots \to F^i(K) \to F^i(L) \to F^i(M) \to F^{i+1}(K) \to F^{i+1}(L) \to \cdots.$$

Pour K dans $\mathscr{D}$, les tronqués $\tau_{[a,b]}K$ de K donnent lieu à des triangles distingués

$$\to \tau_{[a,b]}K \to \tau_{[a,c]}K \to \tau_{[b+1,c]}K \to .$$

Le système de suites exactes longues correspondantes est un "objet spectral" au sens de J. L. Verdier et fournit une suite spectrale

$$E_2^{pq} = F^p H^q K \Rightarrow F^{p+q} K.$$

Voir l'appendice. Soit ${}^iE_2^{pq}$ la suite spectrale analogue pour $K(i)$. Un morphisme (0.1) fournit des morphismes de suites spectrales

$${}^iE_2^{pq} \to {}^{i+1}E_2^{p,q+2}.$$

Montrons que (L.V.) force la dégénérescence de ces suites spectrales. Procédant par récurrence sur $r \geq 2$, supposons que les d_s sont nuls pour $2 \leq s < r$ et prouvons que $d_r = 0$. Pour $q \leq 0$, soit ${}^iP^{pq}$ le facteur direct $F^pP^q(i)$ de ${}^iE_2^{pq} = {}^iE_r^{pq}$.

Par (1.1) et (1.2), il suffit de vérifier que d_r est nul sur les ${}^iP^{pq}$. Par définition, ${}^iP^{pq}$ est annulé par η^{-q+1}. Le morphisme d_r envoie ${}^iP^{pq}$ dans ${}^iE_2^{p+r,q-r+1}$, sur lequel η^{-q+1} est injectif. La nullité de d_r en résulte.

Appliquant la dégénérescence de (1.3) à un foncteur cohomologique $\mathrm{Hom}(X, K)$, pour X dans $\mathscr{C}$, on trouve que tout morphisme $X \to H^iK$ se relève en un morphisme de degré i de X dans K. En particulier, pour $X = H^iK$, l'application identique de H^iK se relève en un morphisme de degré i de H^iK dans K. La somme de ces morphismes

$$\bigoplus H^iK[-i] \xrightarrow{\sim} K$$

est un isomorphisme en cohomologie, donc un isomorphisme.

2. Un isomorphisme (0.3)

Soient K, η vérifiant (L.V.).

LEMME 2.1. *Soit F un foncteur cohomologique de $\mathscr{D}$ dans la catégorie des groupes abéliens. Soient $i \geq 0$ et $x \in F(\tau_{\geq -i}K)$ tel que $\eta^{i+1}(x) \in F^{2(i+1)}(\tau_{\geq i+2}K(i+1))$ soit nul. Alors, x admet un unique relèvement y dans $F(\tau_{\geq -i-1}K)$ tel que $\eta^{i+1}(y) \in F^{2(i+1)}(\tau_{\geq i+1}K(i+1))$ soit nul.*

PREUVE. Nous avons vu au paragraphe 1 que K est isomorphe à la somme de ses $H^i(K)[-i]$. Il en résulte que les suites

$$0 \to F^aH^aK \to F\tau_{\geq a}K \to F\tau_{\geq a+1}K \to 0$$

sont exactes, et de même pour les $K(i)$. Le morphisme η^{i+1} induit un morphisme de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F^{i+1}H^{-i-1}K & \longrightarrow & F\tau_{\geq -i-1}K & \longrightarrow & F\tau_{\geq -i}K & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F^{i+1}H^{i+1}K(i+1) & \longrightarrow & F^{2(i+1)}\tau_{\geq i+1}K(i+1) & \longrightarrow & F^{2(i+1)}\tau_{\geq i+2}K(i+1) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Il reste à appliquer le lemme du serpent.

L'élément y de 2.1 vérifie l'hypothèse de 2.1 pour $i+1$ et on conclut par récurrence:

LEMME 2.2. *Sous les hypothèses 2.1, il existe un unique relèvement $y \in F(K)$ tel que pour chaque $s > i$, $\eta^s y$ ait une image nulle dans $F^{2s}(\tau_{\geq s}K(s))$.*

2.3. Appliquons le lemme 2.2 au foncteur cohomologique $F(L) := \mathrm{Hom}(P^{-i}[i], L)$ et à $x : P^{-i}[i] \to \tau_{\geq -i}K$ défini par l'inclusion de P^{-i} dans $H^{-i}K$. L'hypothèse $\eta^{i+1}x = 0$: $P^{-i}[-i-2] \to \tau_{\geq i+2}K(i+1)$ est vérifiée car $\eta^{i+1}: P^{-i} \to H^{i+2}K(i+1)$ est nul. On conclut

PROPOSITION 2.4. *Soit $i \geq 0$. Il existe un unique morphisme f_i de $P^{-i}[i]$ dans K tel que*

(i) *$H^{-i}(f_i)$ est l'inclusion de P^{-i} dans $H^{-i}K$,*

(ii) *Pour chaque $s > i$, le morphisme induit par $\eta^s f_i$, de $P^{-i}[i]$ dans $(\tau_{\geq s}K)(s)[2s]$, est nul.*

2.5. Des morphismes f_i de 2.4 et de (1.3), on déduit des morphismes $g_i\colon H^i(K)[-i] \to K$, par

(2.5.1) sur le facteur direct $P^{-i}(-j)$ de H^{2j-i} $(0 \le j \le i)$, g_i est $\eta^j f_i$.

La somme de ces morphismes est un isomorphisme (0.3).

2.6. Soit φ un isomorphisme

$$\bigoplus H^i(K)[-i] \xrightarrow{\sim} K$$

induisant l'identité sur la cohomologie. Posons $Q^{i,j} = P^{-i}(-j)[i-2j]$: $P^{-i}(-j)$ en degré cohomologique $2j-i$. Combinant φ avec l'isomorphisme (1.3), on obtient

$$\varphi_1\colon \bigoplus_{0 \le j \le i} Q^{i,j} \xrightarrow{\sim} K. \tag{2.6.1}$$

Nous noterons $\eta_{ij}^{k\ell}$ les éléments de matrice de $\eta\colon K \to K(1)[2]$ relatifs à cette décomposition:

$$\eta_{i,j}^{k,\ell}\colon Q^{i,j} \to Q^{k,\ell}(1)[2].$$

Ces éléments de matrice sont nuls pour $2j-i < 2\ell-k-2$ puisque, pour A, B dans $\mathscr{C}$, $\mathrm{Hom}(A[-n], B[-m]) = 0$ pour $n < m$. Pour $2j-i = 2\ell-k-2$, c'est le morphisme induit par $\eta\colon H^{2j-i}(K) \to H^{2j-i+2}(K)(1)$: l'identité de $P^{-i}(-j)$ si $k = i$ et $\ell = j+1$, 0 sinon.

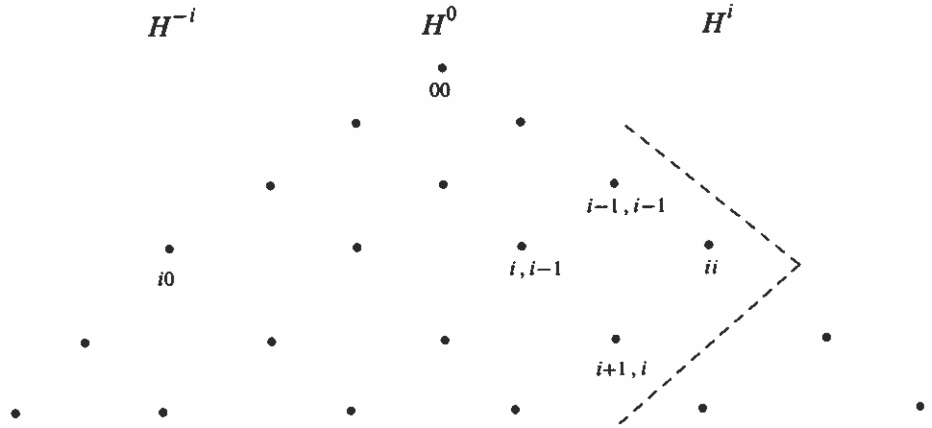
PROPOSITION 2.7. *Pour qu'un isomorphisme φ comme en 2.6 soit celui défini en 2.5, il faut et il suffit que*

(i) *pour $j < i$, le seul $\eta_{ij}^{k\ell}$ non nul est le morphisme évident (identique) $\eta_{i,j}^{i,j+1}$;*

(ii) *$\eta_{ii}^{k\ell}$ n'est non nul que pour $\ell \le i$.*

Le dessin suivant peut aider à suivre le raisonnement. Chaque $\bullet$ y représente un facteur direct $Q^{i,j}$. Dans chaque ligne, i est constant. Chaque colonne correspond à un H^n, $Q^{i,j}$ contribuant à H^{2j-i}. La condition (i) détermine η, sauf sur le côté droit du triangle. La condition (ii) dit que $\eta_{ii}^{k\ell}$

n'est non nul que pour k, ℓ dans la région à gauche de la ligne pointillée



Notations: On allègera les notations en appelant a-morphisme de K dans L un morphisme de K dans $L(a)[2a]$. Par exemple, $\eta_{i,j}^{k,\ell}$ est un 1-morphisme de $Q^{i,j}$ dans $Q^{k,\ell}$.

Preuve. Identifions K à la somme des $H^i(K)[-i]$ par φ. Par définition, l'isomorphisme φ de 2.5 est caractérisé par (i) et la condition

(∗) Pour chaque $i \geq 0$ et $s > i$, le s-morphisme η^s envoie $Q^{i,0}$ dans la somme des $H^n(K)[-n]$ pour $n < s$.

Supposons (i): η évident sur $Q^{i,j}$ pour $j < i$. La condition (∗) équivaut alors à

($\substack{*\\*}$) Pour $t > 0$, le t-morphisme η^t envoie $Q^{i,i}$ dans la somme des $H^n(K)[-n]$ pour $n < i + t$.

Preuve de ($\substack{*\\*}$) $\Rightarrow$ **(ii).** Prouvons par récurrence sur $k - \ell$ que $\eta_{i,i}^{k,\ell} = 0$ si $\ell > i$. Supposons donc l'assertion prouvée pour $k - \ell < a$, et prouvons-la pour $k - \ell = a$. La restriction de η^{a+1} à $Q^{i,i}$ est la somme

$$\sum \eta^a \circ \eta_{i,i}^{k,\ell}.$$

Les termes avec $\ell > i$ sont contrôlés par l'hypothèse de récurrence et (i): ils sont nuls si $k - \ell < a$; pour $k - \ell \geq a$, ils sont à valeur dans les $Q^{k,\ell+a}$, tous distincts, et la nullité de $\eta^a \eta_{i,i}^{k,\ell}$ implique celle de $\eta_{i,i}^{k,\ell}$. Noter que $Q^{k,\ell+a} \subset H^n[-n]$ pour $n = 2\ell + 2a - k$. Pour $k - \ell = a$, on tombe donc dans H^k et l'hypothèse $\ell = k - a > i$ donne $k > i + a$, une valeur de k interdite par ($\substack{*\\*}$). Il reste à montrer que ces termes ne peuvent pas se simplifier avec ceux pour $\ell \leq i$. Il suffit de montrer que si $\ell \leq i$, sur $Q^{k,\ell}$, le a-morphisme η^a est à valeur dans la somme des $H^n[-n]$ pour $n \leq i + a$.

1^{er} cas: $a \leq k - \ell$: on tombe dans $H^{-k+2\ell+2a}$ et $-k + 2\ell + 2a = (-k+\ell+a)+\ell+a \leq 0+i+a = i+a$.
2^{ème} cas: $a > k-\ell$: on écrit $\eta^a = \eta^{a-(k-\ell)}\eta^{k-\ell}$ et on a à considérer $\eta^{a-(k-\ell)}$ sur $Q^{k,k}$.

L'hypothèse $\binom{*}{*}$ assure qu'on tombe dans les H^n pour $n < k + (a-(k-\ell)) = a+\ell \leq a+i$.

Preuve de (ii) $\Rightarrow$ $\binom{*}{*}$. Prouvons par récurrence sur $a \geq 1$ que le a-morphisme η^a restreint à $Q^{i,i}$ est à valeurs dans les $Q^{k,\ell}$ pour $\ell \leq i+a-1$. Pour $a = 1$, c'est l'hypothèse (ii). Supposons-le pour a, et considérons $\eta^{a+1} = \eta \circ \eta^a$. Il suffit de voir que si $\ell \leq i+a-1$, la restriction du 1-morphisme η à $Q^{k,\ell}$ est à valeur dans la somme des $Q^{m,n}$ pour $n \leq i+a$. Si $\ell < k$, cela résulte de (i). Si $\ell = k$, de (ii).

Enfin, $Q^{-k,\ell}$ est dans $H^n[-n]$ pour $n = 2\ell - k$, et, si $\ell \leq i+a-1$, on a $n = 2\ell - k = \ell - (k-\ell) \leq \ell = i+a-1$.

3. Un autre isomorphisme (0.3)

3.1. La catégorie $\mathscr{D}^0$ opposée à $\mathscr{D}$ est encore une catégorie triangulée. Son foncteur de translation est

$$K^0 \longmapsto (K[-1])^0.$$

On la munit de l'auto-équivalence (1) pour laquelle

$$K^0(1) = K(-1)^0.$$

La t-structure de $\mathscr{D}$ en fournit une sur $\mathscr{D}^0$, $\eta: K \to K(1)[2]$ se transpose en

$${}^t\eta: K^0 \to K^0(1)[2]$$

et pour que η vérifie (L.V.), il faut et suffit que ${}^t\eta$ vérifie (L.V.).

La construction (2.5) n'est pas autoduale, ainsi qu'on le voit sur sa caractérisation 2.7. La construction duale, i.e., déduite de 2.4 appliqué à ${}^t\eta$, fournit des morphismes

$$f'_i: K \to P^{-i}(-i)[-i]$$

tels que $H^i(f'_i)$ soit la projection de $H^i(K)$ sur $P^{-i}(-i)$, et que pour chaque $s > i$, le morphisme induit par $f'_i\eta^s$, de K dans $P^{-i}(-i)[-i](s)[2s]$, soit nul sur $\tau_{\leq -s}K$. Procédant comme en 2.5, on en déduit des morphismes $g'_i: K \to H^i(K)[-i]$ de somme un isomorphisme de K avec la somme des $H^i(K)[-i]$. Cet isomorphisme n'est en général pas l'inverse de celui construit en 2.5.

Dans ce paragraphe, nous supposons être en caractéristique 0, i.e., que la catégorie $\mathscr{D}$ est $\mathbb{Q}$-linéaire. Soient K, η vérifiant (L.V.). Notre but est la construction d'un isomorphisme (0.3) autodual.

3.2. La graduation de H^*K définit un endomorphisme

$$h: H^*K \to H^*K: \text{ multiplication par } n \text{ sur } H^nK.$$

Par passage à la cohomologie, η fournit un morphisme de degré 2

$$e: H^*K \to H^*K(1).$$

Parce qu'on est en caractéristique 0, on peut compléter h et e par un morphisme de degré -2

$$f: H^*K \to H^*K(-1)$$

tel que h, e, et f vérifient les relations entre les générateurs standard de sl(2) :

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

Pour donner un sens à ces formules, on désigne de même un morphisme et ceux qui s'en déduisent par une torsion (n).

En caractéristique 0, l'existence de f équivaut à (L.V.). Dans la décomposition (1.3), chaque somme sur j, $\bigoplus P^{-i}(j)$, est stable par h, e, f et, du facteur dans H^{n+1} vers celui dans H^{n-1}, f est l'inverse de e, multiplié par $\frac{(i+1)^2}{4} - \frac{n^2}{4}$.

Soit F l'un des bifoncteurs

$$\mathrm{Ext}^a(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, B[a])$$

sur $\mathscr{C}$. A isomorphisme canonique près le foncteur $F(A(i), B(j))$ ne dépend que de $n := j - i$. On le note $F_n(A, B)$. De h, e, f on déduit encore une action de sl(2) sur $F_*(H^*K, H^*K)$. Plus précisément, des morphismes

$$\begin{aligned} h&: F_j(H^*K, H^*K) \to F_j(H^*K, H^*K), \\ e&: F_j(H^*K, H^*K) \to F_{j+1}(H^*K, H^*K), \\ f&: F_j(H^*K, H^*K) \to F_{j-1}(H^*K, H^*K) \end{aligned}$$

vérifiant les relations de sl(2). L'endomorphisme h est la multiplication par n en degré n et e, de degré 2, est le crochet avec $\eta: H^*K \to H^*K(1)$. Notons F_j^d la partie de degré d de $F_j(H^*K, H^*K)$: la somme des $F_j(H^pK, H^qK)$ pour $q - p = d$. Si $H^iK = 0$ pour $|i| > N$, $F_j^d = 0$ pour $|d| > 2N$. Sur la somme des $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels $\bigoplus_d F_{j+d/2}^d$ (somme sur d de parité fixée, j entier pour d pair, demi-entier pour d impair), (h, e, f) définit une action de sl(2) et e vérifie donc (L.V.). Sur la décomposition (1.3) correspondante, on lit:

LEMME 3.3. *Avec les notations précédentes, pour* $d \leq 1$,

(i) $e: F_{j-1}^{d-2} \to F_j^d$ *est injectif,*

(ii) F_j^d *est somme directe de l'image de* e *et du noyau de* $e^{1-d}: F_j^d \to F_{j+1-d}^{2-d}$.

3.4. Soit φ un isomorphisme

$$\bigoplus H^i(K)[-i] \xrightarrow{\sim} K \tag{3.4.1}$$

induisant l'identité sur le cohomologie. Comme en 2.7 (notations), regardons η comme une 1-application de K dans K et soit $\eta^{(d)}$ sa partie homogène de degré d, dans la décomposition (3.4.1). Avec les notations de 3.2, $\eta^{(d)}$ est dans F_1^d pour F le foncteur Ext^{2-d}. Pour $d > 2$, $\eta^{(d)}$ est donc nul, et pour $d = 2$, $\eta^{(2)} \subset \mathrm{Hom}(H^*K, H^*K(1))$ est l'endomorphisme e de 3.2.

Proposition 3.5. *Supposons $\mathcal{D}$ $\mathbb{Q}$-linéaire et que (K, η) vérifie (L.V.). Il existe alors un unique isomorphisme* (3.4.1) *pour lequel on ait*

(3.5.1) *pour* $d \leq 1$, $e^{1-d}(\eta^{(d)}) = 0$.

Noter que pour $d = 1$, (3.5.1) signifie que $\eta^{(1)} = 0$.

Preuve. Par récurrence sur $n \geq -1$, nous allons monter que les conditions (3.5.1) pour $-n < d \leq 1$ déterminent φ uniquement modulo composition avec un endomorphisme $1 + \psi$ de la somme des $H^i(K)[-i]$, avec ψ de degré $\leq -n-2$. Noter que, avec les notations de 3.2, la composante homogène $\psi^{(d)}$ de degré d de ψ est dans F_0^d pour F le foncteur Ext^{-d}.

Pour $n = -1$, l'hypothèse est vide et la conclusion exprime que φ, supposé être l'identité sur la cohomologie, est défini modulo composition avec $1 + \psi$, ψ de degré ≤ -1.

Prouvons l'assertion pour $n \geq 0$, en la supposant vraie pour $n - 1$. Changer φ en $\varphi \circ (1 + \psi)$ conjugue le 1-morphisme η (plutôt, $\varphi^{-1}\eta\varphi$) de la somme des $H^iK[-i]$ en $(1+\psi)^{-1}\eta(1+\psi)$. Pour ψ de degré $\leq -n-1$, puisque η est de degré ≤ 2, on a

$$\begin{aligned}(1+\psi)^{-1}\eta(1+\psi) &\equiv \eta + [\eta, \psi] \\ &\equiv \eta + e(\psi^{(-n-1)})\end{aligned}$$

modulo degré $\leq -n$. Par 3.3, un unique choix de $\psi^{(-n-1)}$ fournit un nouveau η vérifiant (3.5.1) pour $d > -n$, comme promis.

Proposition 3.6. *Soit φ l'isomorphisme* (3.4.1) *de* 3.5. *Alors, sur $P^{-i}[i]$, φ coïncide avec le morphisme f_i de* 2.4.

Preuve. Identifions la somme des $H^i[-i]$ à K par φ. Par la caractérisation 2.4 de f_i, il suffit de vérifier que pour $s > i$, la restriction à $P^{-i}[i]$ du s-morphisme η^s est de degré $< s+i$. On a une décomposition en composantes homogènes

$$\eta = \eta^{(2)} + \sum_{a \leq 0} \eta^{(a)}.$$

Posons $e = \eta^{(2)}$. Par 3.5, on a

$$(\mathrm{ad}\, e)^{-a+1}(\eta^{(a)}) = 0.$$

Développons η^s, et réordonnant les facteurs par application itérée de la règle

$$ex = xe + \operatorname{ad} e(x).$$

On trouve que η^s est somme de termes des types suivant:

(a) e^s

(b) $(\operatorname{ad} e)^{r_k}(\eta^{(a_k)}) \cdots (\operatorname{ad} e)^{r_1}(\eta^{(a_1)})e^{r_0}$ avec $\sum_0^k r_k < s$.

Si $s > i$, e^s s'annule sur $P^{-i}[i]$. De même, les termes (b) avec $r_0 > i$ s'annulent sur $P^{-i}[i]$. Le facteur $(\operatorname{ad} e)^{r_k}(\eta^{(a_k)})$ est de degré $2r_k + a_k$, et nul si $r_k > -a_k$. S'il est non nul, il est de degré

$$2r_k + a_k = r_k + (r_k + a_k) \leq r_k.$$

Chaque terme (b) non nul sur $P^{-i}[i]$ est donc de degré $\leq 2r_0 + \sum_1^k r_k = r_0 + \sum_0^k r_i < i + s$, comme requis.

4. Cohomologie ℓ-adique

4.1. Soient k un corps, ℓ un nombre premier premier à la caractérisque et prenons pour $\mathscr{D}$ la catégorie dérivée ℓ-adique avec sa t-structure naturelle [5]. Le coeur $\mathscr{C}$ de $\mathscr{D}$ est la catégorie des représentations ℓ-adiques (V, ρ) de $\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$: V de dimension finie sur $\mathbb{Q}_\ell$ et $\rho: \operatorname{Gal}(\bar{k}/k) \to \operatorname{GL}(V)$ continu. Les $\operatorname{Ext}^a(V, W)$ sont les

$$H^a(\operatorname{Gal}(\bar{k}/k), \operatorname{Hom}(V, W))$$

calculés en terme de cochaînes continues.

Soit X projectif et lisse sur k, purement de dimension N. Soit $a: X \to \operatorname{Spec}(k)$ le morphisme structural. L'image directe $Ra_*\mathbb{Q}_\ell$ est alors dans $\mathscr{D}$. Fixons un faisceau invertible ample $\mathscr{O}(1)$ et soit $\eta: Ra_*\mathbb{Q}_\ell \to Ra_*\mathbb{Q}_\ell(1)[2]$ le produit par $c_1\mathscr{O}(1)$. On sait que $(Ra_*\mathbb{Q}_\ell[N], \eta)$ vérifie (L.V.) (P. Deligne, [4, Théorème 4.1.1]).

Le décomposition 2.5 de $Ra_*\mathbb{Q}_\ell[N]$ fournit par translation une décomposition de $Ra_*\mathbb{Q}_\ell$. Changeant de notation, nous noterons P^i le facteur direct de $H^iRa_*\mathbb{Q}_\ell$ noyau de

$$\eta^{N-i+1}: H^iRa_*\mathbb{Q}_\ell \to H^{2N-i+2}Ra_*\mathbb{Q}_\ell.$$

Dans la notation du §1 pour $Ra_*\mathbb{Q}_\ell[N]$, c'est P^{i-N}. La décomposition 2.6.1 déduite de 2.5 se translate en une décomposition

$$\bigoplus_{0 \leq j \leq N-i} P^i(-j)[-i-2j] \xrightarrow{\sim} Ra_*\mathbb{Q}_\ell. \tag{4.1.1}$$

D'après 2.7, les seules composantes intéressantes du 1-morphisme η dans cette décomposition sont les $\eta_{i,N-i}^{k,\ell}$ pour $\ell \leq N-i$. On a

$$\eta_{i,N-i}^{k,\ell} \in \operatorname{Ext}^{(2N-i)-(k+2\ell)+2}(P^i(-(N-i)), P^k(-\ell)(1)).$$

On aimerait regarder ces classes comme étant motiviques: elles ont été définies par un procédé uniforme en ℓ. Par ailleurs, des conjectures (optimistes) sur la relation entre cycles algébriques et la catégorie dérivée motivique impliquent [3, §§3.7, 3.8] que pour M un motif effectif de poids w, et $i \geq 0$, on a

$$\mathrm{Ext}^n(1, \check{M}(i)) = 0 \quad \text{pour } n > w + i.$$

Le cas particulier qui nous importe est l'annulation de cet Ext pour n égal à l'opposé du poids de $\check{M}(i)$, M effectif et $i > 0$.

Dans le cas qui nous importe, par (L.V.) et la dualité de Poincaré, P^k est isomorphe à $\check{P}^k(-k)$ et

$$\eta^{k,\ell}_{i,N-i} \in \mathrm{Ext}^n(1, V)$$

avec n l'opposé du poids de V et

$$V = \check{P}^i \otimes \check{P}^n(N - i - k - \ell + 1)$$

Si les $\eta^{k,\ell}_{i,N-i}$ ℓ-adiques sont motiviques, la conjecture implique donc une réponse positive à la

QUESTION. A-t-on $\eta^{k,\ell}_{i,N-i} = 0$ pour $N - i - k - \ell \geq 0$?

4.2. Dans la décomposition (4.1.1), le cup-produit

$$Ra_*\mathbb{Q}_\ell \otimes Ra_*\mathbb{Q}_\ell \to Ra_*\mathbb{Q}_\ell$$

a des composantes

$$\begin{aligned} c^{m,n}_{i,j;k,\ell} &\in \mathrm{Ext}^A(P^i(-j) \otimes P^k(-\ell), P^m(-n)) \\ &= \mathrm{Ext}^A(1, V) \end{aligned}$$

avec A l'opposé du poids de V et

$$M = \check{P}^i \otimes \check{P}^k \otimes \check{P}^m(j + k - m - n).$$

On veut donc nullité pour $j + k - m - n > 0$.

4.3. Soit Z un cycle algébrique de codimension d. Il a une classe

$$cl(Z): \mathbb{Q}_\ell \to Ra_*\mathbb{Q}_\ell(d)[2d],$$

de composantes

$$cl(Z)^{i,j} \in \mathrm{Ext}^A(1, V),$$

où A est l'opposé du poids de V et où

$$V = P^i(-j + d) = \check{P}^i(d - i - j).$$

On espère donc la nullité des composantes $cl(Z)^{i,j}$ pour $i + j < d$.

Appendice. Objets spectraux, d'après J. L. Verdier

J'ai appris le formalisme exposé dans cet appendice de J. L. Verdier, qui disait s'être inspiré du traitement des suites spectrales dans Cartan-Eilenberg (vol. 1, pp. 318–319).

A.1. Soit $\mathscr{D}$ une catégorie triangulée. Un *objet spectral* dans $\mathscr{D}$ est la donnée de

(1) une famille X_{pq} d'objets de $\mathscr{D}$, indexée par les paires d'entiers $p \leq q$;
(2) pour $p' \leq p$, $q' \leq q$, un morphisme $X_{pq} \to X_{p'q'}$;
(3) pour $p \leq q \leq r$, un morphisme degré un, appelé *cobord*, $X_{pq} \to X_{qr}$.

On exige que

(a) les morphismes (2) définissent un foncteur contravariant de l'ensemble ordonné des paires (p, q) avec $p \leq q$ dans $\mathscr{D}$;
(b) pour $p \leq q \leq r$, $p' \leq q' \leq r'$ et $p' \leq p$, $q' \leq q$, $r' \leq r$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{pq} & \xrightarrow{\partial} & X_{qr} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{q'q'} & \xrightarrow{\partial} & q'r' \end{array}$$

de morphismes (2) et (3) est commutatif;
(c) pour $p \leq q \leq r$, le triangle

$$X_{qr} \to X_{p,r} \to X_{p,q} \xrightarrow{1} X_{q,r}$$

de morphismes (2) et (3) est distingué.

Exemple. Pour $\mathscr{D}$ la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne $\mathscr{A}$ et (K, F) un complexe filtré, les $X_{pq} = F^p(K)/F^q(K)$ forment un objet spectral.

Remarque. Un objet spectral X sera dit d'amplitude dans $[a, b]$ si les morphismes (1): $X_{pq} \to X_{p'q'}$ sont des isomorphismes pour $p' \leq p \leq a$ et $q' = q$, ainsi que pour $b < q' \leq q$ et $p' = p$. Il revient au même d'imposer la nullité des $X_{p,p+1}$ pour $p \notin [a, b]$. Un objet spectral d'amplitude $[0, n]$ avec $n = 1$ (resp. 2) s'identifie à un triangle distingué (resp. à un diagramme de l'octaèdre), cf. [**1**, §§1.1.6, 1.1.7, 1.1.14].

A.2. Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne, munie d'un "foncteur de translation" $X \mapsto X[1]$ (une autoéquivalence). On note $X \mapsto X[n]$ l'itéré $n^{ième}$ du foncteur de translation et on appelle morphisme de degré n de X dans Y un morphisme de X dans $Y[n]$. Une suite $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z$, avec α (resp. β) de degré n (resp. m) est dite exacte si la suite $X \to Y[n] \to Z[n+m]$ l'est.

Un *objet spectral* de $\mathscr{A}$ est la donnée $(1')$, $(2')$, $(3')$ d'objets et de morphismes de $\mathscr{A}$, comme en A.1, vérifiant les conditions (a'), (b') de même formulation que A.1 (a), (b), et la condition

(c$'$) pour $p \leq q \leq r$, la suite

$$\cdots \to X_{qr} \to X_{pr} \to X_{p,q} \xrightarrow{\partial} X_{q,r} \to X_{pr} \to \cdots$$

de morphismes $(2')$ et $(3')$ est exacte .

Soit X un objet spectral de $\mathscr{A}$. D'après (b') le morphisme $(2')$: $X_{p,r} \to X_{p,r}$ est l'identité. D'après (c') pour $p = q$, on a $X_{pp} = 0$. Si $p \leq q'$, le morphisme $X_{pq} \to X_{p'q'}$ est nul, car il si factorise par X_{pp}. Pour $p \leq q \leq r \leq s$, le composé des morphismes cobord

$$X_{pq} \to X_{qr} \to X_{rs}$$

est nul: le premier se factorise par le morphisme cobord vers X_{qs}, suivi de $X_{qs} \to X_{qr}$, et le composé $X_{qs} \to X_{qr} \to X_{rs}$ est nul par (c').

Si $\mathscr{A}$ est la catégorie des objets gradués d'une catégorie abélienne $\mathscr{B}$, avec le foncteur de translation défini par

$$(X[1])^n = X^{n+1},$$

la donnée $(1')$ est celle d'objets $X^n_{p,q}$ de $\mathscr{B}$, $(2')$ celle de morphismes $X^n_{pq} \to X^n_{p'q'}$, $(3')$ celle de morphismes $X^n_{pq} \to X^{n+1}_{qr}$ et (c') devient une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow X^n_{pr} \to X^n_{pq} \xrightarrow{\partial} X^{n+1}_{qr} \to X^{n+1}_{pr} \to \cdots.$$

Exemple. Avec les notations précédentes, si F est un foncteur cohomologique [6, §3.1] de $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{B}$, et $F^\bullet$ le foncteur de $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{A}$ défini par

$$F^n(X) = F(X[n]),$$

alors, $F^\bullet$ transforme objets spectraux de $\mathscr{D}$ en objets spectraux de $\mathscr{A}$.

Remarque. Comme en A.1, si X est un objet spectral de $\mathscr{A}$, pour que les morphismes $(2')$ soient des isomorphismes pour $p' \leq p' \leq a$ et $q' = q$, ainsi que pour $b < q' \leq q$ et $p' = p$, il faut et il suffit que $X_{p,p+1} = 0$ pour $p \notin [a, b]$. On dit alors que X est d' amplitude dans $[a, b]$. On notera alors $X_{-\infty,q}$ (resp. $X_{p,\infty}$) un quelconque $X_{p,q}$ avec $p \leq a$ (resp. $b < q$).

A.3. Soit X un objet spectral de $\mathscr{A}$. Pour $p \leq q \leq r \leq s$, posons

$$E(pqrs) := \mathrm{Im}(X_{qs} \to X_{pr}). \tag{A.3.1}$$

Le morphisme $X_{qs} \to X_{pr}$ se factorise par X_{qr}, et cette factorisation donne lieu à une croix de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
X_{pq} \arrow[dr, "\partial"] & & X_{qs} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
& X_{qr} \arrow[dl, "\partial"'] \arrow[dr] & \\
X_{rs} & & X_{pr}
\end{tikzcd}$$

On en déduit qu'on a aussi

$$E(pqrs) = H(X_{pq} \to X_{qr} \to X_{rs}). \tag{A.3.2}$$

Pour $k \leq \ell \leq m \leq n \leq p \leq q$, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X_{\ell n} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & X_{nq} \arrow[d] \\ X_{km} \arrow[r, "\partial"] & X_{mp} \end{tikzcd}$$

fournit par passage aux images par les flèches $(2')$ verticales un morphisme de degré un $\partial : E(k\ell mn) \to E(mnpq)$. Pour $k \leq \ell \leq m \leq n \leq p \leq q \leq r \leq s$, le composé

A.3.3) $$E(k\ell mn) \xrightarrow{\partial} E(mnpq) \xrightarrow{\partial} E(pqrs)$$

est nul, car les lignes du diagramme

$$\begin{tikzcd} X_{\ell n} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & X_{nq} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & X_{qs} \arrow[d] \\ X_{km} \arrow[r, "\partial"] & X_{mp} \arrow[r, "\partial"] & X_{pr} \end{tikzcd}$$

ont un composé nul (voir A.2).

Construction. *La cohomologie de la suite* (A.3.3) *est* $E(\ell npr)$.

La cohomologie de (A.3.3) est aussi celle de

$$X_{\ell n} \xrightarrow{\partial} \mathrm{Im}(X_{nq} \to X_{mp}) \xrightarrow{\partial} X_{pr}.$$

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & X_{mn} \arrow[dl] \arrow[ddr, "\partial"] & & \\ X_{\ell n} \arrow[rrr] & & & X_{nq} \arrow[dd] \\ & & X_{np} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dl, "\partial"] & \\ X_{pr} \arrow[r] & X_{pq} & & X_{mp} \arrow[lll, bend left=0] \end{tikzcd}$$

La cohomologie cherchée est encore celle de

$$X_{\ell n} \to H(X_{mn} \to X_{np} \to X_{pq}) \to X_{pr},$$

égale à

$$H(X_{\ell n} \to X_{np} \to X_{pr}),$$

ce qui fournit la construction cherchée par (A.3.2).

A.4. Pour $r \geq 1$, posons

$$E_r^p = E(p - 1 + 1, p, p + 1, p + r).$$

Le morphisme ∂ de A.3, pour $(p-r+1, p, p+1, p+r, p+r+1, p+2r)$ est une flèche de degré un: $d_r: E_r^p \to E_r^{p+r}$. On a $d_r^2 = 0$ et A.3 fournit

$$E_{r+1}^p = H(E_r^{p-r} \to E_r^p \to E_r^{p+r}):$$

les E_r^p forment une suite spectrale.

Si X est d'amplitude finie, i.e., dans un intervalle $[a, b]$ (A.2), cette suite spectrale converge vers $X_{-\infty,\infty}$: E_r^p est indépendant de r pour r assez grand $(r > b-a)$ et s'identifie au gradué de $X_{-\infty,\infty}$ filtré par les images des $X_{p\infty}$. Si on note F cette filtration, la suite exacte

$$X_{p,\infty} \to X_{-\infty,\infty} \to X_{-\infty,p}$$

montre en effet que

$$X_{p,\infty} \twoheadrightarrow F^p \qquad \text{et} \qquad X_{-\infty,\infty}/F^p \hookrightarrow X_{-\infty,p},$$

de sorte que $F^p/F^{p+1} \sim \operatorname{Im}(X_{p,\infty} \to X_{-\infty,p+1}) = E_\infty^p$.

La suite spectrale ainsi construite part de E_1. Dans le cas où $\mathscr{A}$ est la catégorie des objets gradués de $\mathscr{B}$, si on veut une suite spectrale partant de E_2, il suffit de renuméroter:

$$E_2^{pq} := (E_1^{-q})^{p+q}.$$

Bibliographie

1. A. A. Beilinson, J. Bernstein, et P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Astérisque **100** (1983) pp. 1–172.
2. P. Deligne, *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **35** (1968) pp. 107–126.
3. ——, *A quoi servent les motifs?* ce volume, pp. 143–161.
4. ——, *La conjecture de Weil*. II, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **52** (1980), pp. 137–252.
5. T. Ekedahl, *On the adic formalism*, Grothendieck Festschrift, vol. II, pp. 197–218.
6. J. L. Verdier, *Catégories dérivées, état zéro*, Séminaire de Géométrie Algébrique 4 1/2, pp. 262–311, Springer Lecture Notes, no. 569, Springer-Verlag, New York and Berlin, 1977.

Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey